



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A IX-A**

SUBIECTUL 1

a) Fie $a, b \in \mathbf{R}$ și $x, y > 0$. Arătați că $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$.

b) Se dă șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ de numere reale pozitive. Știind că $\sum_{k=1}^n a_k^2 = n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2n+1}{3}, \forall n \geq 1$ arătați că $a_n = n, \forall n \geq 1$.

c) Arătați că $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k+1} > n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{n+3}, \forall n \geq 2$.

Rezolvare și barem:

a) $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \Leftrightarrow a^2xy + a^2y^2 + b^2xy + b^2x^2 \geq a^2xy + 2abxy + b^2xy \Leftrightarrow (ay - bx)^2 \geq 0. \quad (1p)$

b) Arătăm prin inducție matematică că $a_n = n \quad \forall n \geq 1$.

Pentru $n=1, a_1^2 = 1 \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} \Leftrightarrow a_1 = 1. \quad (1p)$

Presupunem $a_k = k, \forall k = \overline{1, n}$ și demonstrăm că $a_{n+1} = n+1$.

$\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 = (n+1) \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{2n+3}{3} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n a_k^2 + a_{n+1}^2 = (n+1) \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{2n+3}{3} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{2n+1}{3} + a_{n+1}^2 = (n+1) \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{2n+3}{3} \Leftrightarrow a_{n+1}^2 = (n+1)^2 \Rightarrow a_{n+1} = n+1 \quad (2p)$

c) Din inegalitatea Titu Andreescu, avem că $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k+1} \geq \frac{\left(\sum_{k=1}^n k\right)^2}{\sum_{k=1}^n (k+1)} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k+1} \geq \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}{\frac{n(n+3)}{2}} \Leftrightarrow$

$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k+1} \geq n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{n+1}{n+3} \quad (2p)$

Pentru $n \geq 2$ egalitatea nu are loc, deoarece $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} \neq \dots \neq \frac{n}{n+1}. \quad (1p)$



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A IX-A**

SUBIECTUL 2

Șirurile $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ sunt definite prin: $a_1 = 2018, b_1 = 2017$, iar $a_{n+1} = 2018a_n + 2017b_n - 1$ și $b_{n+1} = 2017a_n + 2018b_n + 1, \forall n \geq 1$. Să se calculeze $b_{2017} - a_{2017}$.

Rezolvare și barem:

Prin scăderea relațiilor $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - a_n + 2, \forall n \geq 1$. (2p)

Folosim relația de recurență și scriem următoarele relații:

$$b_2 - a_2 = b_1 - a_1 + 2$$

$$b_3 - a_3 = b_2 - a_2 + 2$$

.....

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - a_n + 2 \quad (2p)$$

Prin adunarea relațiilor membru cu membru și reducerea termenilor avem relația:

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_1 - a_1 + 2n = 2n - 1, \forall n \geq 1. \quad (1p)$$

Finalizarea $b_{2017} - a_{2017} = 4031$. (2p)



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A IX-A

SUBIECTUL 3

Fie triunghiul ABC și $A' \in BC$, $B' \in AC$, $C' \in AB$ astfel încât AA' , BB' , CC' sunt concurente în punctul M .

a) Arătați că $\frac{MA}{MA'} = \frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C}$.

b) Arătați că dacă $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ atunci punctul M este centrul de greutate al triunghiului ABC .

Rezolvare si barem:

a) În $\triangle ABA'$ cu transversala $C'C$ aplicăm teorema lui Menelaus și obținem:

$$\frac{C'A}{C'B} \cdot \frac{BC}{A'C} \cdot \frac{MA'}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{C'A}{C'B} = \frac{A'C}{BC} \cdot \frac{MA}{MA'}$$

În $\triangle ACA'$ cu transversala BB' aplicăm teorema lui Menelaus și obținem:

$$\frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{BC}{BA'} \cdot \frac{MA'}{MA} = 1 \Rightarrow \frac{B'A}{B'C} = \frac{BA'}{BC} \cdot \frac{MA}{MA'} \quad (1p)$$

$$\text{Adunând relațiile obținem } \frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C} = \left(\frac{A'C}{BC} + \frac{BA'}{BC} \right) \cdot \frac{MA}{MA'} = \frac{MA}{MA'}$$

$$\text{Deci } \frac{MA}{MA'} = \frac{C'A}{C'B} + \frac{B'A}{B'C} \quad (1p)$$

$$\text{b) } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC'} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{AC'} = \vec{0} \quad (1p)$$

$$\text{Rezultă că } \frac{BA'}{BC} \overrightarrow{BC} + \frac{CB'}{CA} \overrightarrow{CA} + \frac{AC'}{AB} \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\frac{BA'}{BC} - \frac{CB'}{CA} \right) \overrightarrow{BC} + \left(\frac{AC'}{AB} - \frac{CB'}{CA} \right) \overrightarrow{AB} = \vec{0} \quad (1p)$$

Cum vectorii \overrightarrow{BC} și \overrightarrow{AB} sunt necoliniari rezultă că $\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB} = k$, adică

$$\frac{A'C}{BC} = \frac{B'A}{CA} = \frac{C'B}{AB} = 1 - k \quad (1p)$$

$$\text{Din teorema lui Ceva avem că } \frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = 1, \text{ adică } k^3 = (1 - k)^3 \Rightarrow k = \frac{1}{2} \quad (1p)$$

Deci A' , B' , C' sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC , M este centrul de greutate al triunghiului ABC . (1p)



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA
DE ȘTIINȚE
MATEMATICE
DIN ROMÂNIA

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 17.02.2018
BAREM DE CORECTARE
CLASA A IX-A**

SUBIECTUL 4

Notăm cu $[a]$ partea întreagă a lui a .

a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left[\frac{2x-1}{3}\right] + \left[\frac{4x+1}{6}\right] = \frac{5x-4}{3}$.

b) Arătați că $[\sqrt{n} + \sqrt{n+3}] = [\sqrt{4n+6}]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare și barem:

a) Notăm $\frac{2x-1}{3} = y$. Rezultă că $\frac{4x+1}{6} = y + \frac{1}{2}$ și $x = \frac{3y+1}{2}$.

Ecuația devine $[y] + \left[y + \frac{1}{2}\right] = \frac{5y-1}{2} \Leftrightarrow [2y] = \frac{5y-1}{2}$. (1p)

Se impun condițiile $\frac{5y-1}{2} = k \in \mathbb{Z}$ și $k \leq 2y < k+1 \Leftrightarrow k \leq \frac{4k+2}{5} < k+1$. Se obține $k \in (-3, 2] \cap \mathbb{Z}$,
adică $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. (1p)

Dar $x = \frac{3y+1}{2} = \frac{3k+4}{5}$, deci $x \in \left\{-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 2\right\}$. (1p)

b) Notăm $x_n = \sqrt{n} + \sqrt{n+3}$ și $y_n = \sqrt{4n+6}$.

Din inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz avem că:

$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \Leftrightarrow a+b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$, adevărată pentru orice numere reale a și b . Pentru

$a = \sqrt{n}$ și $b = \sqrt{n+3}$ obținem $\sqrt{n} + \sqrt{n+3} \leq \sqrt{4n+6} \Leftrightarrow x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (i) (1p)

Cum $\sqrt{n} + \sqrt{n+3} \geq \sqrt{4n+5} \Leftrightarrow 2n+3+2\sqrt{n^2+3n} \geq 4n+5 \Leftrightarrow \sqrt{n^2+3n} \geq n+1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow n^2+3n \geq n^2+2n+1 \Leftrightarrow n \geq 1$, care este adevărată pentru orice $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că
 $x_n \geq \sqrt{4n+5}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (1p)

Deoarece $y_n^2 = 4n+6$, iar $4n+6$ nu este pătratul unui număr natural, rezultă că $[y_n]^2 \leq 4n+5$, adică
 $[y_n] \leq \sqrt{4n+5}$. Deci $[y_n] \leq x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. (ii) (1p)

Din relațiile (i) și (ii) rezultă că $[y_n] \leq x_n \leq y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, adică $[x_n] = [y_n], \forall n \in \mathbb{N}^*$. (1p)